

# О СИСТЕМАХ ПОДПРОСТРАНСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ НА УГОЛ ИЛИ КОММУТАЦИИ ДЛЯ КАЖДОЙ ПАРЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

А.В.Стрелец, И.С.Фещенко

**АННОТАЦИЯ.** Мы изучаем системы подпространств  $H_1, \dots, H_n$  комплексного гильбертова пространства  $H$ , удовлетворяющие следующим условиям: для каждого индекса  $i > 1$  фиксирован угол  $\theta_{1,i} \in (0, \pi/2)$  между подпространствами  $H_1$  и  $H_i$ ; проекторы на подпространства  $H_{2k}$  и  $H_{2k+1}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $0 \leq 2m < n$ , коммутируют; а все остальные пары подпространств  $H_i$  и  $H_j$  ортогональны.

Основным инструментом изучения таких систем подпространств является  $G$ -конструкция — конструкция системы подпространств гильбертова пространства по ее оператору Грама.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Системы подпространств.** Изучение систем  $L = (V; V_1, \dots, V_n)$  подпространств  $V_1, \dots, V_n$  конечномерного линейного пространства  $V$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , в частности, описание неразложимых четверок подпространств в  $V$  [1], описание неразложимых представлений в пространстве  $V$  конечных частично упорядоченных множеств (см., например, [9]), и т.д. являются классическими задачами алгебры (см. библиографию в [10]).

Пусть  $H$  — комплексное гильбертово пространство,  $H_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , — набор его подпространств. Изучение систем подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n)$  гильбертова пространства  $H$  (или, что тоже самое, наборов соответствующих ортопроекторов  $P_1, \dots, P_n$ ) является важной задачей функционального анализа, которой посвящены многочисленные публикации (см., например, [10] и библиографию там).

Описание всех неразложимых систем подпространств  $S$  с точностью до унитарной эквивалентности хорошо известно в случае  $n \leq 2$ . Так, в случае  $n = 1$  любая неразложимая система  $S$  унитарно эквивалентна одной из систем  $S_0 = (\mathbb{C}; 0)$  и  $S_1 = (\mathbb{C}; \mathbb{C})$ ; а в случае  $n = 2$  (см., например, [3]) с точностью до унитарной эквивалентности существуют четыре неразложимые пары подпространств  $S_{00} = (\mathbb{C}; 0, 0)$ ,  $S_{01} = (\mathbb{C}; 0, \mathbb{C})$ ,  $S_{10} = (\mathbb{C}; \mathbb{C}, 0)$ ,  $S_{11} = (\mathbb{C}; \mathbb{C}, \mathbb{C})$  и семейство неразложимых систем одномерных подпространств в двумерном пространстве  $S_\varphi = (H; H_1, H_2)$ ,  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , таких, что в некотором ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  в  $H$ , подпространство  $H_1$  порождено вектором  $e_1$ , а подпространство  $H_2$  порождено вектором  $x = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2$ .

В случае  $n \geq 3$  задача описания неразложимых систем подпространств  $S$  с точностью до унитарной эквивалентности является  $*$ -дикой (см. [4, 5, 8]).  $*$ -Дикой является даже задача об описании троек подпространств  $S = (H; H_1, H_2, H_3)$  таких что  $H_2 \perp H_3$  (о  $*$ -диких задачах см. [4, 5]).

Таким образом, естественно выделить тот или иной класс систем подпространств и, по возможности, описать с точностью до унитарной эквивалентности все неразложимые системы из выбранного класса.

**1.2. Некоторые классы систем подпространств.** В работе [7] физики Н. Н. V. Temperley и Е. Н. Lieb ввели алгебры

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\langle p_1, p_2, \dots, p_n \mid p_j^2 &= p_j, j = 1, 2, \dots, n; \\ p_i p_j p_i &= \nu p_i, |i - j| = 1; \\ p_i p_j &= p_j p_i, |i - j| \geq 2 \rangle, \end{aligned}$$

$\nu \in \mathbb{C}$ , в связи с изучением моделей статистической физики. В случае  $\nu = \tau_0^2 \in (0, 1)$  такие алгебры можно рассматривать как  $*$ -алгебры, если определить в них инволюцию равенствами  $p_j^* = p_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Пусть  $\pi$  — некоторое  $*$ -представление такой  $*$ -алгебры в гильбертовом пространстве  $H$ , а  $H_i$  — образы ортопроекторов  $P_i = \pi(p_i)$ . Таким образом мы получили систему подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n)$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- (1) «соседние» пары подпространств *расположены друг относительно друга под углом*  $\theta_0$ ,  $\tau_0 = \cos \theta_0$ , т.е.  $P_i P_{i+1} P_i = \tau_0^2 P_i$ ,  $P_{i+1} P_i P_{i+1} = \tau_0^2 P_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ ;
- (2) остальные пары подпространств *«коммутируют»*, т.е.  $P_i P_j = P_j P_i$ .

Рассмотрим граф  $A_n$  с множеством вершин  $\{1, 2, \dots, n\}$  и множеством ребер  $\{i, i + 1\}$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ . Тогда условия на угол между подпространствами соответствуют парам вершин  $i, j$ , соединенных ребром в  $A_n$ , а условия коммутации — парам вершин  $i, j$ , не соединенных ребром.

Используя это наблюдение, можно определить класс систем подпространств, связанный с графом  $\Gamma$  и функцией  $\tau$  на его ребрах. Пусть  $\Gamma$  — граф без петель и кратных ребер с множеством вершин  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Обозначим через  $E$  множество ребер  $\Gamma$ , а через  $\overline{E}$  — множество пар вершин  $\{i, j\}$ , не соединенных ребром в  $\Gamma$ . Пусть на ребрах  $\Gamma$ , заданы функции

$$\theta : E \rightarrow (0, \pi/2) : \{i, j\} \mapsto \theta_{\{i, j\}} \quad \text{и} \quad \tau = \cos \theta : E \rightarrow (0, 1) : \{i, j\} \mapsto \tau_{\{i, j\}}.$$

Через  $Sys(\Gamma, \tau)$  обозначим множество систем подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n)$  таких, что

- (1) если  $\{i, j\} \in E$ , то подпространства  $H_i, H_j$  расположены друг относительно друга под углом  $\theta_{\{i, j\}}$ , т.е.  $P_i P_j P_i = \tau_{\{i, j\}}^2 P_i$  и  $P_j P_i P_j = \tau_{\{i, j\}}^2 P_j$ ;
- (2) если  $\{i, j\} \in \overline{E}$ , то подпространства  $H_i, H_j$  «коммутируют», т.е.  $P_i P_j = P_j P_i$ .

Системы  $S \in Sys(\Gamma, \tau)$  можно рассматривать как  $*$ -представления соответствующей  $*$ -алгебры

$$\begin{aligned} \mathcal{TL}_{\Gamma, \tau} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, \dots, p_n \mid p_j^2 &= p_j^* = p_j, j = 1, 2, \dots, n; \\ p_i p_j p_i &= \tau_{\{i, j\}}^2 p_i, \{i, j\} \in E; \\ p_i p_j &= p_j p_i, \{i, j\} \in \overline{E} \rangle. \end{aligned}$$

Отметим, что если «забыть» об инволюции, т.е. в определении  $\mathcal{TL}_{\Gamma, \tau}$  условия  $p_j^2 = p_j^* = p_j$  заменить на  $p_j^2 = p_j$ , то определенная таким образом алгебра будет *проективной алгеброй* (см. [2], раздел 6).

Более узкий класс систем подпространств получится, если для каждой пары вершин  $i, j$ , не соединенных ребром в  $\Gamma$ , условие коммутации усилить, заменив на условие *ортogonalности*  $P_i P_j = P_j P_i = 0$ . Множество таких систем подпространств — «простых» систем подпространств — обозначим через  $Sys(\Gamma, \tau, \perp)$ . Такие системы можно рассматривать как  $*$ -представления соответствующей  $*$ -алгебры  $\mathcal{TL}_{\Gamma, \tau, \perp}$  (которая является фактор-алгеброй  $*$ -алгебры  $\mathcal{TL}_{\Gamma, \tau}$ ). Изучению класса систем подпространств  $Sys(\Gamma, \tau, \perp)$  и  $*$ -алгебр  $\mathcal{TL}_{\Gamma, \tau, \perp}$  посвящена серия работ (см. обзор [10]).

Естественным образом возникает класс систем подпространств, занимающий «промежуточное» положение между  $Sys(\Gamma, \tau)$  и  $Sys(\Gamma, \tau, \perp)$ . Пусть  $E^c$  — некоторое подмножество множества  $\overline{E}$ . Обозначим через  $Sys(\Gamma, E^c, \tau)$  множество систем подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n)$  таких, что

- (1) если  $\{i, j\} \in E$ , то подпространства  $H_i, H_j$  расположены друг относительно друга под углом  $\theta_{\{i, j\}}$ ;
- (2) если  $\{i, j\} \in E^c$ , то подпространства  $H_i, H_j$  «коммутируют»;
- (3) если  $\{i, j\} \in \overline{E} \setminus E^c$ , то подпространства  $H_i, H_j$  ортогональны.

В настоящей работе мы изучаем классы систем подпространств  $Sys(K_{1,N}, E_m^c, \tau)$ , где  $N \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $2m \leq N$ ,  $K_{1,N}$  — «звезда» с  $N$  лучами,  $\tau$  — произвольная функция на ребрах  $K_{1,N}$ , а множество  $E_m^c$  состоит из пар вершин  $\{2k, 2k+1\}$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Перед тем как более аккуратно сформулировать задачу и основные результаты, напомним некоторые необходимые определения.

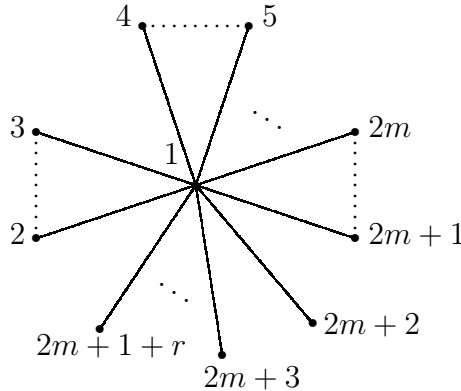
**1.3. Основные определения.** Систему подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n)$  называют *разложимой*, если существует ортогональное разложение  $H = H' \oplus H''$  в прямую сумму ненулевых подпространств  $H', H''$  и системы подпространств  $S' = (H'; H'_1, \dots, H'_n)$ ,  $S'' = (H''; H''_1, \dots, H''_n)$  такие, что  $H_k = H'_k \oplus H''_k$  для всех  $1 \leq k \leq n$ . Система подпространств  $S$  называется *неразложимой* если она не является разложимой. Хорошо известно, что неразложимость системы  $S$  равносильна ее *неприводимости*, т.е. выполнению следующего условия: если ограниченный линейный оператор  $A : H \rightarrow H$  удовлетворяет  $AP_k = P_k A$  при  $1 \leq k \leq n$ , то  $A = \lambda I$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Две системы подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n)$  и  $S' = (H'; H'_1, \dots, H'_n)$  подпространств в  $H$  и  $H'$  называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарный оператор  $U : H \rightarrow H'$  такой, что  $H'_k = U(H_k)$  для всех  $1 \leq k \leq n$ . Последнее условие равносильно  $P'_k = UP_k U^*$ , т.е.  $UP_k = P'_k U$ .

Для системы подпространств  $S$ , вектор  $(\dim H; \dim H_1, \dots, \dim H_n)$ , компонентами которого являются мощности, называют *обобщенной размерностью* системы подпространств  $S$ . В дальнейшем, чтобы не усложнять обозначения, если для системы  $S$  все  $\dim H_k$  равны, то обобщенной размерностью  $S$  будем называть вектор  $(\dim H; \dim H_1)$ .

Система подпространств  $S$  называется *нулевой*, если  $H_i = 0$  для всех  $1 \leq i \leq n$ . В противном случае система называется ненулевой.

**1.4. Постановка задачи и основные результаты.** Пусть  $m, r$  — неотрицательные целые числа, положим  $N = 2m + r$ . Рассмотрим «звезду» с  $N$  лучами, т.е. граф  $K_{1,N}$ , множество вершин которого  $V = \{1, 2, \dots, N+1\}$  занумеровано таким образом, что вершина 1 соединена со всеми остальными вершинами. Таким образом, множество ребер  $E$  равно  $\{\{1, k\} \mid k \in V \setminus \{1\}\}$ . Через  $E_m^c$  обозначим множество пар вершин  $\{\{2k, 2k+1\} \mid 1 \leq k \leq m\}$  (на рисунке эти пары вершин соединены пунктиром):



Пусть каждому ребру  $\{1, k\}$  сопоставлен угол  $\theta_{\{1, k\}} \in (0, \pi/2)$ , т.е. задана функция  $\theta : E \rightarrow (0, \pi/2)$ . Определим функцию  $\tau = \cos \theta : E \rightarrow (0, 1)$ , т.е.  $\tau_{\{1, k\}} = \cos \theta_{\{1, k\}} \in (0, 1)$ .

Введенные граф  $K_{1,N}$ , множество  $E_m^c$  и функция  $\tau$  позволяют «наглядно» сформулировать условия, которым удовлетворяют системы подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n)$ ,  $n = N + 1$ , рассматриваемые в этой статье.

**(Ang): Условия на углы** (соответствующие парам вершин, соединенных ребром). Для каждого  $k = 2, 3, \dots, N + 1$  подпространства  $H_1$  и  $H_k$  расположены друг относительно друга под углом  $\theta_{\{1,k\}}$ , т.е.  $P_1 P_k P_1 = \tau_{\{1,k\}}^2 P_1$  и  $P_k P_1 P_k = \tau_{\{1,k\}}^2 P_k$ .

**(Com): Условия коммутации** (соответствующие парам вершин, соединенных пунктиром). Для каждого  $k = 1, 2, \dots, m$  ортопроекторы  $P_{2k}$  и  $P_{2k+1}$  коммутируют, т.е.  $P_{2k} P_{2k+1} = P_{2k+1} P_{2k}$ .

**(Ort): Условия ортогональности** (соответствующие парам вершин, не соединенных ребром или пунктиром). Если пара различных вершины  $i, j$  не соединена ребром, и эта пара не принадлежит множеству  $E_m^c$ , то соответствующие подпространства  $H_i$  и  $H_j$  ортогональны, т.е.  $P_i P_j = 0$ .

Отметим, что в случае  $m = 0$  изучаемая система подпространств является «простой» системой подпространств, связанной с графом  $K_{1,N}$  и функцией  $\tau$  на его ребрах.

Системы подпространств, удовлетворяющие приведенным выше условиям, можно рассматривать как  $*$ -представления в гильбертовом пространстве  $*$ -алгебры  $\mathcal{TL}(K_{1,N}, E_m^c, \tau)$ , определенной образующими и соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{TL}(K_{1,N}, E_m^c, \tau) = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, \dots, p_{N+1} \mid & p_j^2 = p_j^* = p_j, \quad j \in V \\ & p_i p_j p_i = \tau_{\{i,j\}}^2 p_i, \quad \{i, j\} \in E \\ & p_i p_j = p_j p_i, \quad \{i, j\} \in E_m^c, \\ & p_i p_j = 0, \quad \{i, j\} \notin E \cup E_m^c \rangle. \end{aligned}$$

Взаимно однозначное соответствие между системами подпространств  $S$ , удовлетворяющими условиям (Ang), (Com), (Ort), и  $*$ -представлениями  $\pi$   $*$ -алгебры  $\mathcal{TL}(K_{1,N}, E_m^c, \tau)$  в гильбертовом пространстве  $H$  задается равенством  $H_k = \text{Im } \pi(p_k)$ ,  $k \in V$ .

В обозначении  $*$ -алгебры  $\mathcal{TL}(K_{1,N}, E_m^c, \tau)$  буквы  $\mathcal{TL}$  выбраны в честь физиков Н. Н. V. Temperley и Е. Н. Lieb'a.

Основными результатами нашей работы являются:

- (1) описание (с точностью до унитарной эквивалентности) всех систем подпространств  $S$ , удовлетворяющих (Ang), (Com), (Ort) (см. подраздел 3.1);
- (2) описание (с точностью до унитарной эквивалентности) всех неприводимых систем подпространств  $S$ , удовлетворяющих (Ang), (Com), (Ort) (см. теорему 3.1 и подраздел 3.2).

Отметим, что для  $m \geq 3$  при вариациях параметров  $\tau_{\{1,k\}}$  возникают три возможные ситуации: существует конечное число унитарно неэквивалентных неприводимых систем подпространств (*конечная задача*); унитарно неэквивалентных неприводимых систем подпространств бесконечное число, но их все еще можно описать (*ручная задача*); задача описания всех систем подпространств с точностью до унитарной эквивалентности является «безнадежной» в определенном смысле (*дикая задача*).

В разделе 2 приводится  $G$ -конструкция, которая является основным инструментом, используемым для описания систем подпространств. Сама  $G$ -конструкция и результаты раздела 2 за исключением результатов подраздела 2.5 сформулированы для произвольных систем подпространств. Утверждения подраздела 2.5 могут быть усилены, но с одной стороны это привело бы к усложнению доказательств, а с другой стороны и в таком варианте они могут быть использованы для изучения класса систем подпространств намного более широкого, чем тот, который изучается в настоящей работе.

Авторы надеются, что  $G$ -конструкция позволит в дальнейших исследованиях получить описания других классов систем подпространств. Например, одним из интересных для изучения классов является класс систем подпространств, который задается графом  $K_{1,N}$ ,

функцией  $\tau$  на ребрах и множеством пар вершин («пунктирных» ребер)  $E^c$ , более сложным, чем  $E_m^c$ .

**1.5. Обозначения.** В данной работе мы рассматриваем комплексные гильбертовы пространства, которые обозначаем буквами  $H, M, K$ . Отметим, что мы не накладываем дополнительных условий на размерность гильбертова пространства. Чтобы не усложнять обозначения, скалярное произведение, как правило, обозначается  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . В различных гильбертовых пространствах скалярное произведение может обозначаться одинаково, если это не приводит к недоразумению.

## 2. $G$ -КОНСТРУКЦИЯ

**2.1.  $G$ -конструкция системы подпространств гильбертова пространства.** Пусть  $H_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , — набор ненулевых гильбертовых пространств. Определим гильбертово пространство  $\tilde{H} = H_{0,1} \oplus \dots \oplus H_{0,n}$  и будем обозначать через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  скалярное произведение в нем. Пусть  $\Gamma_k : H_{0,k} \rightarrow \tilde{H}$  — естественное вложение пространства  $H_{0,k}$  в пространство  $\tilde{H}$ , то есть  $\Gamma_k x = (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$ , где  $x$  стоит на  $k$ -том месте. Тогда оператор  $\Gamma_k^* : \tilde{H} \rightarrow H_{0,k}$  является оператором выделения  $k$ -ой координаты:  $\Gamma_k^*(x_1, \dots, x_n) = x_k$ . Определим

$$\tilde{H}_k = \text{Im } \Gamma_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Пусть  $B : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$  — ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор, причем для его блочного разложения  $B = (B_{i,j} : H_{0,j} \rightarrow H_{0,i}, 1 \leq i, j \leq n)$  выполнено

$$(2.1) \quad B_{k,k} = I_{H_{0,k}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Определим  $\tilde{H}_0 = \text{Ker } B$ . Используя оператор  $B$ , зададим скалярное произведение в линейном пространстве  $\tilde{H}/\tilde{H}_0$  с помощью равенства:

$$\langle x + \tilde{H}_0, y + \tilde{H}_0 \rangle = \langle Bx, y \rangle_0, \quad x, y \in \tilde{H}.$$

Очевидно, что это определение корректно, так как не зависит от выбора представителей классов эквивалентности. Пусть  $H$  — пополнение пространства  $\tilde{H}/\tilde{H}_0$  относительно введенного скалярного произведения.

Определим ограниченный линейный оператор  $\rho : \tilde{H} \rightarrow H$  равенством

$$\rho(x) = x + \tilde{H}_0.$$

Ясно, что  $\text{Im } \rho = \tilde{H}/\tilde{H}_0$ . Положим  $H_k = \rho(\tilde{H}_k) = \{z + \tilde{H}_0 \mid z \in \tilde{H}_k\}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Так как для произвольного  $z \in \tilde{H}_k$

$$\|z + \tilde{H}_0\| = \sqrt{\langle Bz, z \rangle_0} = \|z\|_0,$$

то  $H_k$  является подпространством пространства  $H$ . Кроме того,

$$\rho_k = \rho \upharpoonright_{\tilde{H}_k} : \tilde{H}_k \rightarrow H_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

является унитарным оператором. Далее, поскольку  $H_1 + \dots + H_n = \rho(\tilde{H}) = \tilde{H}/\tilde{H}_0$ , то  $H_1 + \dots + H_n$  плотно в  $H$ .

Систему подпространств  $(H; H_1, \dots, H_n)$ , полученную в результате применения приведенной выше конструкции, будем обозначать  $\mathcal{G}(H_{0,1}, \dots, H_{0,n}; B)$ , а саму конструкцию будем называть  $G$ -конструкцией.

## 2.2. Произвольная система подпространств как результат $G$ -конструкции.

**Определение 2.1.** Пусть  $K$  — гильбертово пространство,  $S = (K; K_1, \dots, K_n)$  — система его подпространств. Обозначим  $Q_i$  ортопроектор на  $K_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Оператор  $G(S) : \bigoplus_{i=1}^n K_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n K_i$ , заданный своим блочным разложением  $G_{i,j} = Q_i \upharpoonright_{K_j} : K_j \rightarrow K_i$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , называют оператором Грама системы подпространств  $S$ .

**Утверждение 2.1.** Пусть  $S = (K; K_1, \dots, K_n)$  — система ненулевых подпространств гильбертова пространства  $K$ , причем  $K_1 + \dots + K_n$  плотно в  $K$ . Тогда система подпространств  $\mathcal{G}(K_1, \dots, K_n; G(S))$  унитарно эквивалентна системе  $S$ .

*Доказательство.* Из определения  $G = G(S)$  видно, что  $G_{i,i} = I_{K_i}$  и  $G_{i,j}^* = G_{j,i}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Покажем, что оператор  $G$  неотрицателен. Скалярное произведение в  $K$  обозначим  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Для произвольных  $x_j \in K_j$ ,  $y_i \in K_i$  имеем

$$\langle G_{i,j}x_j, y_i \rangle = \langle Q_i x_j, y_i \rangle = \langle x_j, y_i \rangle.$$

Тогда для произвольных  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{H}$  и  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \tilde{H}$  верно равенство

$$\langle Gx, y \rangle_0 = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n y_k \right\rangle.$$

Отсюда следует, что  $G$  неотрицателен, а его ядро  $\text{Ker } G$  состоит из векторов  $x \in \tilde{H}$  таких, что  $x_1 + \dots + x_n = 0$ .

Определим оператор  $U : \rho(\tilde{H}) \rightarrow \sum_{i=1}^n K_i$  равенством

$$U(x + \tilde{H}_0) = \sum_{k=1}^n x_k, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{H}, \quad x_i \in K_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Это определение корректно, поскольку  $\tilde{H}_0 = \text{Ker } G$ .

Так как

$$\langle x + \tilde{H}_0, y + \tilde{H}_0 \rangle = \langle Gx, y \rangle_0 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i \right\rangle,$$

и сумма  $K_1 + \dots + K_n$  плотна в  $K$ , то  $U$  — линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение, образ которого плотен в  $K$ . Следовательно, оператор  $U$  единственным образом продолжается по непрерывности до унитарного оператора  $\bar{U} : H \rightarrow K$ . Поскольку  $\bar{U}(H_i) = K_i$  для всех  $1 \leq i \leq n$ , то утверждение доказано.  $\square$

## 2.3. Критерий унитарной эквивалентности систем подпространств полученных в результате $G$ -конструкции.

**Утверждение 2.2.** Системы подпространств

$$\mathcal{G}(H_{0,1}, \dots, H_{0,n}; B) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}(H'_{0,1}, \dots, H'_{0,n}; B')$$

унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует набор унитарных операторов  $U_{0,k} : H'_{0,k} \rightarrow H_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , такой, что для произвольных  $i, j$  выполнено равенство

$$(2.2) \quad B'_{i,j} = U_{0,i}^* B_{i,j} U_{0,j}.$$

Если ввести унитарный оператор

$$\tilde{U} = \text{diag}(U_{0,1}, \dots, U_{0,n}) : \tilde{H}' \rightarrow \tilde{H},$$

то систему равенств (2.2) можно записать в виде  $B' = \tilde{U}^* B \tilde{U}$ .

*Доказательство. 1.* Пусть системы подпространств

$$(H, H_1, \dots, H_n) = \mathcal{G}(H_{0,1}, \dots, H_{0,n}; B) \quad \text{и} \quad (H', H'_1, \dots, H'_n) = \mathcal{G}(H'_{0,1}, \dots, H'_{0,n}; B')$$

унитарно эквивалентны. Тогда существует унитарный оператор  $U : H' \rightarrow H$ , такой, что  $U(H'_k) = H_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Определим унитарный оператор  $U_k = U \upharpoonright_{H'_k} : H'_k \rightarrow H_k$ . Определим унитарный оператор  $U_{0,k} : H'_{0,k} \rightarrow H_{0,k}$  равенством

$$U_{0,k} = \Gamma_k^* \rho_k^{-1} U_k \rho'_k \Gamma'_k$$

Тогда для каждого  $1 \leq k \leq n$  диаграмма

$$(2.3) \quad \begin{array}{ccc} H'_{0,k} & \xrightarrow{U_{0,k}} & H_{0,k} \\ \Gamma'_k \downarrow & & \downarrow \Gamma_k \\ \tilde{H}'_k & \longrightarrow & \tilde{H}_k \\ \rho'_k \downarrow & & \downarrow \rho_k \\ H'_k & \xrightarrow{U_k} & H_k \end{array}$$

коммутативна.

Покажем, что выполнено равенство  $B'_{i,j} = U_{0,i}^* B_{i,j} U_{0,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . В силу коммутативности диаграммы (2.3), для любого  $x \in H'_{0,k}$  верно равенство

$$\Gamma_k U_{0,k} x + \tilde{H}_0 = U_k (\Gamma'_k x + \tilde{H}'_0) = U (\Gamma'_k x + \tilde{H}'_0).$$

Пусть  $x \in H'_{0,j}$ ,  $y \in H'_{0,i}$ , тогда верны равенства

$$\begin{aligned} \langle B'_{i,j} x, y \rangle &= \langle B' \Gamma'_j x, \Gamma'_i y \rangle_0 = \langle \Gamma'_j x + \tilde{H}'_0, \Gamma'_i y + \tilde{H}'_0 \rangle \\ \langle B_{i,j} U_{0,j} x, U_{0,i} y \rangle &= \langle B \Gamma_j U_{0,j} x, \Gamma_i U_{0,i} y \rangle_0 = \langle \Gamma_j U_{0,j} x + \tilde{H}_0, \Gamma_i U_{0,i} y + \tilde{H}_0 \rangle, \end{aligned}$$

следовательно  $\langle B'_{i,j} x, y \rangle = \langle U_{0,i}^* B_{i,j} U_{0,j} x, y \rangle$ , то есть  $B'_{i,j} = U_{0,i}^* B_{i,j} U_{0,j}$ .

**2.** Наоборот, пусть существует набор унитарных операторов  $U_{0,k} : H'_{0,k} \rightarrow H_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , такой, что  $B' = \tilde{U}^* B \tilde{U}$ . Определим оператор  $U : \rho'(\tilde{H}') \rightarrow \rho(\tilde{H})$  равенством

$$U(x + \tilde{H}'_0) = \tilde{U}x + \tilde{H}_0, \quad x \in \tilde{H}'.$$

Это определение корректно, так как  $\tilde{U}(\text{Ker } B') = \text{Ker } B$ .

Для произвольных  $x, y \in \tilde{H}'$  имеем:

$$\langle x + \tilde{H}'_0, y + \tilde{H}'_0 \rangle = \langle B'x, y \rangle_0 = \langle \tilde{U}^* B \tilde{U}x, y \rangle_0 = \langle B \tilde{U}x, \tilde{U}y \rangle_0 = \langle \tilde{U}x + \tilde{H}_0, \tilde{U}y + \tilde{H}_0 \rangle.$$

Таким образом,  $U$  — линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение, образ которого  $U(\rho'(\tilde{H}')) = \rho(\tilde{H})$  плотен в  $H$ . Поэтому существует единственное продолжение по непрерывности  $U$  до унитарного оператора  $\bar{U} : H' \rightarrow H$ . Ясно, что для всех  $1 \leq k \leq n$ ,  $\bar{U}(H'_k) = H_k$ , таким образом утверждение доказано.  $\square$

**2.4. Связь свойств системы подпространств  $\mathcal{G}(H_{0,1}, \dots, H_{0,n}; B)$  со свойствами оператора  $B$ .** Пусть система подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n) = \mathcal{G}(H_{0,1}, \dots, H_{0,n}; B)$ . Обозначим  $P_i$  ортопроектор на  $H_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Пусть  $G = G(S)$  — оператор Грама системы  $S$ ,  $G_{i,j} = P_i \upharpoonright_{H_j} : H_j \rightarrow H_i$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Утверждение 2.3.** *Существует набор унитарных операторов  $U_{0,k} : H_k \rightarrow H_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , такой, что  $G_{i,j} = U_{0,i}^* B_{i,j} U_{0,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .*

*Доказательство.* Из утверждения 2.1 следует, что  $S$  унитарно эквивалентна системе подпространств  $\mathcal{G}(H_1, \dots, H_n; G)$ . Теперь из утверждения 2.2 получаем нужное.  $\square$

Утверждение 2.3 позволяет связать свойства системы подпространств  $S$  со свойствами оператора  $B$ . Во всех следующих примерах через  $\alpha, \beta$  мы обозначаем пару различных индексов из множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Пример 2.1.** *Условие ортогональности.* Подпространства  $H_\alpha$  и  $H_\beta$  ортогональны тогда и только тогда, когда  $P_\alpha P_\beta = 0$ , что равносильно условию  $G_{\alpha,\beta} = 0$ , что, в свою очередь, равносильно  $B_{\alpha,\beta} = 0$ .

**Пример 2.2.** *Условие на угол между подпространствами.* Пусть  $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ . Определим  $\tau_0 = \cos \theta_0$ . Подпространства  $H_\alpha, H_\beta$  расположены друг относительно друга под углом  $\theta_0$  тогда и только тогда, когда

$$P_\alpha P_\beta P_\alpha = \tau_0^2 P_\alpha, \quad P_\beta P_\alpha P_\beta = \tau_0^2 P_\beta,$$

т.е.

$$G_{\alpha,\beta} G_{\beta,\alpha} = \tau_0^2 I_{H_\alpha}, \quad G_{\beta,\alpha} G_{\alpha,\beta} = \tau_0^2 I_{H_\beta}.$$

Поскольку  $G_{i,j} = U_{0,i}^* B_{i,j} U_{0,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  для некоторого набора унитарных операторов  $U_{0,k} : H_k \rightarrow H_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , то последнее условие равносильно

$$B_{\alpha,\beta} B_{\beta,\alpha} = \tau_0^2 I_{H_{0,\alpha}}, \quad B_{\beta,\alpha} B_{\alpha,\beta} = \tau_0^2 I_{H_{0,\beta}}.$$

Последние два равенства равносильны унитарности оператора  $B_{\alpha,\beta}/\tau_0$ .

**Пример 2.3.** *Условие коммутации.* Условие  $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha$  равносильно условию

$$P_\alpha P_\beta = P_\alpha P_\beta P_\alpha,$$

что, в силу плотности  $H_1 + \dots + H_n$  в  $H$ , равносильно

$$P_\alpha P_\beta P_i \upharpoonright_{H_i} = P_\alpha P_\beta P_\alpha P_i \upharpoonright_{H_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Это условие может быть переписано в виде  $G_{\alpha,\beta} G_{\beta,i} = G_{\alpha,\beta} G_{\beta,\alpha} G_{\alpha,i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , что, в свою очередь, равносильно условию

$$B_{\alpha,\beta} B_{\beta,i} = B_{\alpha,\beta} B_{\beta,\alpha} B_{\alpha,i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Заметим, что последнее равенство выполнено автоматически при  $i = \alpha$ , а при  $i = \beta$  из этого равенства следует, что  $B_{\alpha,\beta}$  является частичной изометрией.

**2.5. Неприводимость системы подпространств  $\mathcal{G}(H_{0,1}, \dots, H_{0,n}; B)$ .** Пусть система подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n) = \mathcal{G}(H_{0,1}, \dots, H_{0,n}; B)$ . Обозначим  $P_k$  ортопроектор на  $H_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

**2.5.1. Спуск оператора.** Пусть  $C : H \rightarrow H$  — линейный непрерывный оператор, коммутирующий со всеми  $P_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , т.е. для всех  $1 \leq k \leq n$  подпространства  $H_k$  и  $H_k^\perp$  инвариантны относительно  $C$ . Для  $1 \leq k \leq n$  определим оператор  $C_k = C \upharpoonright_{H_k} : H_k \rightarrow H_k$ , тогда  $C_k^* = C^* \upharpoonright_{H_k} : H_k \rightarrow H_k$ . Определим оператор  $C_{0,k} : H_{0,k} \rightarrow H_{0,k}$  равенством  $C_{0,k} = \Gamma_k^* \rho_k^{-1} C_k \rho_k \Gamma_k$ . Набор операторов  $C_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , будем называть спуском оператора  $C$ . Из определения  $C_{0,k}$  следует, что для всех  $1 \leq k \leq n$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{0,k} & \xrightarrow{C_{0,k}} & H_{0,k} \\ \Gamma_k \downarrow & & \Gamma_k \downarrow \\ \tilde{H}_k & \longrightarrow & \tilde{H}_k \\ \rho_k \downarrow & & \rho_k \downarrow \\ H_k & \xrightarrow{C_k} & H_k \end{array}$$

коммутативна.



**Утверждение 2.4.** Для всех  $1 \leq i, j \leq n$  справедливо равенство

$$(2.4) \quad B_{i,j}C_{0,j} = C_{0,i}B_{i,j}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим произвольные  $x \in H_{0,j}$ ,  $y \in H_{0,i}$ . Тогда

$$\rho\Gamma_j C_{0,j}x = C_j\rho\Gamma_j x = C\rho\Gamma_j x.$$

Поскольку  $C_{0,i}^* = \Gamma_i^* \rho_i^{-1} C_i^* \rho_i \Gamma_i$ , то

$$\rho\Gamma_i C_{0,i}^* y = C_i^* \rho\Gamma_i y = C^* \rho\Gamma_i y.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} \langle B_{i,j}C_{0,j}x, y \rangle &= \langle B\Gamma_j C_{0,j}x, \Gamma_i y \rangle_0 = \langle \rho\Gamma_j C_{0,j}x, \rho\Gamma_i y \rangle = \langle C\rho\Gamma_j x, \rho\Gamma_i y \rangle = \\ &= \langle \rho\Gamma_j x, C^* \rho\Gamma_i y \rangle = \langle \rho\Gamma_j x, \rho\Gamma_i C_{0,i}^* y \rangle = \langle B_{i,j}x, C_{0,i}^* y \rangle = \langle C_{0,i}B_{i,j}x, y \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (2.4) доказано.  $\square$

Для последовательности индексов  $l = (i(1), i(2), \dots, i(k))$  определим оператор

$$B_l = B_{i(1),i(2)} \dots B_{i(k-1),i(k)} : H_{0,i(k)} \rightarrow H_{0,i(1)}.$$

**Следствие 2.1.** Для произвольной последовательности индексов  $l = (i, \dots, j)$  выполнено равенство

$$C_{0,i}B_l = B_l C_{0,j}.$$

**2.5.2. Подъем набора операторов.** Пусть  $C_{0,k} : H_{0,k} \rightarrow H_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , — набор унитарных операторов, причем для произвольных  $i, j$  выполнено (2.4). Определим унитарный оператор  $\tilde{C} = \text{diag}(C_{0,1}, \dots, C_{0,n}) : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ . Из равенств (2.4) следует, что  $B = \tilde{C}^* B \tilde{C}$ .

Определим оператор  $C : \rho(\tilde{H}) \rightarrow \rho(\tilde{H})$  равенством

$$C(x + \tilde{H}_0) = \tilde{C}x + \tilde{H}_0, \quad x \in \tilde{H}.$$

Это определение корректно, так как  $\tilde{C}(\text{Ker } B) = \text{Ker } B$ .

Для произвольных  $x, y \in \tilde{H}$  имеем:

$$\langle x + \tilde{H}_0, y + \tilde{H}_0 \rangle = \langle Bx, y \rangle_0 = \langle \tilde{C}^* B \tilde{C}x, y \rangle_0 = \langle B \tilde{C}x, \tilde{C}y \rangle_0 = \langle \tilde{C}x + \tilde{H}_0, \tilde{C}y + \tilde{H}_0 \rangle.$$

Поскольку  $\rho(\tilde{H})$  плотно в  $H$ , то  $C$  — линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение, образ которого  $C(\rho(\tilde{H})) = \rho(\tilde{H})$  плотен в  $H$ . Поэтому  $C$  продолжается единственным образом (по непрерывности) до унитарного оператора (который мы также обозначим  $C$ )  $C : H \rightarrow H$ . Оператор  $C$  называется подъемом набора операторов  $C_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Из определения  $C$  следует, что  $C(H_k) = H_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Из унитарности  $C$  получим  $C(H_k^\perp) = H_k^\perp$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Очевидно, спуск оператора  $C$  совпадает с набором  $C_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

**2.5.3. Неприводимость системы подпространств  $S$ .** Для последовательности индексов (пути)  $l = (i(1), \dots, i(k-1), i(k))$  определим путь  $l^* = (i(k), i(k-1), \dots, i(1))$ . Ясно, что  $B_l^* = B_{l^*}$ . Для двух путей  $l, l'$  таких, что конец  $l$  совпадает с началом  $l'$ ,  $l = (i(1), \dots, i(k-1), i(k))$ ,  $l' = (i(k), i(k+1), \dots, i(m))$ , определим путь  $ll' = (i(1), \dots, i(k-1), i(k), i(k+1), \dots, i(m))$ . Далее  $\alpha$  обозначает натуральное число,  $1 \leq \alpha \leq n$ . Обозначим через  $\mathcal{L}_\alpha$  множество путей  $l = (\alpha, \dots, \alpha)$  с началом и концом  $\alpha$ . Отметим, что множество операторов  $B_l$ ,  $l \in \mathcal{L}_\alpha$ , является  $*$ -множеством, т.е. если оператор  $A$  принадлежит этому множеству, то оператор  $A^*$  также ему принадлежит.

**Утверждение 2.5.** Пусть  $\alpha$  таково, что для произвольного  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , существует путь  $l = (\alpha, \dots, k)$ , для которого оператор  $B_l$  обратим. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) система подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_n)$  неприводима,
- (2) множество операторов  $B_l$ ,  $l \in \mathcal{L}_\alpha$ , неприводимо.

*Доказательство.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Предположим противное. Тогда существует оператор  $C_{0,\alpha} : H_{0,\alpha} \rightarrow H_{0,\alpha}$ , отличный от  $\lambda I_{H_{0,\alpha}}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , такой, что  $C_{0,\alpha} B_l = B_l C_{0,\alpha}$  для всякого пути  $l \in \mathcal{L}_\alpha$ . Поскольку множество  $B_l$ ,  $l \in \mathcal{L}_\alpha$ , является  $*$ -множеством, то оператор  $C_{0,\alpha}$  можно выбрать унитарным. Из условия утверждения следует, что для каждого  $k$  существует путь  $l(k) = (k, \dots, \alpha)$ , для которого  $B_{l(k)}$  обратим. Определим оператор

$$C_{0,k} = B_{l(k)} C_{0,\alpha} B_{l(k)}^{-1} : H_{0,k} \rightarrow H_{0,k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Отметим, что для  $k = \alpha$  определение корректно, так как операторы  $C_{0,\alpha}$  и  $B_{l(\alpha)}$  коммутируют.

Покажем, что  $C_{0,k}$  унитарен. Ясно, что  $C_{0,k}^* = (B_{l(k)}^*)^{-1} C_{0,\alpha}^* B_{l(k)}^*$ . Таким образом,  $C_{0,k}$  обратим, и

$$C_{0,k}^* C_{0,k} = (B_{l(k)}^*)^{-1} C_{0,\alpha}^* B_{l(k)}^* B_{l(k)} C_{0,\alpha} B_{l(k)}^{-1} = (B_{l(k)}^*)^{-1} C_{0,\alpha}^* C_{0,\alpha} B_{l(k)}^* B_{l(k)} B_{l(k)}^{-1} = I_{H_{0,k}},$$

откуда следует унитарность  $C_{0,k}$ .

Покажем, что для произвольных  $i, j$   $C_{0,i} B_{i,j} = B_{i,j} C_{0,j}$ . Это равенство равносильно равенству  $B_{l(i)} C_{0,\alpha} B_{l(i)}^{-1} B_{i,j} = B_{i,j} B_{l(j)} C_{0,\alpha} B_{l(j)}^{-1}$ , что равносильно

$$(2.5) \quad B_{l(i)}^* B_{l(i)} C_{0,\alpha} B_{l(i)}^{-1} B_{i,j} = B_{l(i)}^* B_{i,j} B_{l(j)} C_{0,\alpha} B_{l(j)}^{-1}.$$

Поскольку путь  $l(i)^* l(i) \in \mathcal{L}_\alpha$ , оператор  $B_{l(i)}^* B_{l(i)}$  коммутирует с  $C_{0,\alpha}$ . Поскольку путь  $l(i)^* (i, j) l(j) \in \mathcal{L}_{0,\alpha}$ , оператор  $B_{l(i)}^* B_{i,j} B_{l(j)}$  коммутирует с  $C_{0,\alpha}$ . Поэтому обе части равенства (2.5) равны  $C_{0,\alpha} B_{l(i)}^* B_{i,j}$ , и, таким образом, равенство (2.5) верно.

Поднимем семью унитарных операторов  $C_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , до унитарного оператора  $C : H \rightarrow H$ . Тогда  $CP_k = P_k C$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Поскольку система подпространств  $S$  неприводима, то для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}$   $C = \lambda I_H$ . Поэтому  $C_{0,\alpha} = \lambda I_{H_{0,\alpha}}$ , получили противоречие.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Предположим, линейный непрерывный оператор  $C : H \rightarrow H$  коммутирует со всеми  $P_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Пусть набор операторов  $C_{0,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , получен спуском  $C$ . Поскольку  $C_{0,\alpha} B_l = B_l C_{0,\alpha}$  для всякого  $l \in \mathcal{L}_\alpha$ , то существует  $\lambda \in \mathbb{C}$ , для которого  $C_{0,\alpha} = \lambda I_{H_{0,\alpha}}$ . Рассмотрим произвольное  $1 \leq k \leq n$  и выберем путь  $l = (\alpha, \dots, k)$ , для которого  $B_l$  обратим. Поскольку  $C_{0,\alpha} B_l = B_l C_{0,\alpha}$ , то  $B_l (C_{0,k} - \lambda I_{H_{0,k}}) = 0$ , откуда  $C_{0,k} = \lambda I_{H_{0,k}}$ . Из доказанного следует, что для  $x \in \rho(\tilde{H})$   $Cx = \lambda x$ . Из плотности  $\rho(\tilde{H})$  в  $H$  следует, что  $C = \lambda I_H$ . Это доказывает неприводимость системы подпространств  $S$ .  $\square$

### 3. ОПИСАНИЕ СИСТЕМ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ (ANG), (COM), (ORT)

В этом разделе мы

- (1) получим описание всех систем подпространств, удовлетворяющих условиям (Ang), (Com), (Ort);
- (2) получим описание всех *неприводимых* унитарно неэквивалентных систем, удовлетворяющих условиям (Ang), (Com), (Ort);
- (3) в качестве примера, приведем описание всех неприводимых унитарно неэквивалентных систем подпространств, удовлетворяющих (Ang), (Com), (Ort), в случае  $m = 3$  и  $r = 1$ .

Сначала покажем, что без ограничения общности можно считать, что  $\tau_{\{1,2k\}} = \tau_{\{1,2k+1\}}$  для всех  $1 \leq k \leq m$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $M, M_1, M_2$  — подпространства  $H$ . Предположим, что выполнены следующие условия:

- (1) подпространства  $M, M_i$  расположены друг относительно друга под углом  $\varphi_i \in [0, \pi/2)$ ,  $i = 1, 2$ ,
- (2) ортопроекторы на подпространства  $M_1, M_2$  коммутируют.

Тогда если  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , то подпространства  $M_1, M_2$  ортогональны.

*Доказательство.* Обозначим  $Q, Q_1, Q_2$  ортопроекторы на  $M, M_1, M_2$  соответственно. Определим  $\mu_k = \cos \varphi_k$  для  $k = 1, 2$ . Имеем:

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= Q_1 Q_2 Q_1 = \frac{1}{\mu_2^2} Q_1 Q_2 Q Q_2 Q_1 = \\ &= \frac{1}{\mu_2^2} Q_2 Q_1 Q Q_1 Q_2 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} Q_2 Q_1 Q_2 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} Q_1 Q_2, \end{aligned}$$

откуда  $Q_1 Q_2 = 0$ .  $\square$

Итак, уменьшив  $m$  (если это необходимо), можно считать, что  $\tau_{\{1,2k\}} = \tau_{\{1,2k+1\}}$  для всех  $1 \leq k \leq m$ . Определим

$$\tau_k = \begin{cases} \tau_{\{1,2k\}} = \tau_{\{1,2k+1\}}, & 1 \leq k \leq m; \\ \tau_{\{1,k+m+1\}}, & m+1 \leq k \leq m+r. \end{cases}$$

**3.1. Описание всех систем подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_{N+1})$ , удовлетворяющих условиям (Ang), (Com), (Ort).** Прежде всего сделаем несколько очевидных замечаний.

**1.** Нулевая система  $S = (H; 0, \dots, 0)$  удовлетворяет всем нужным условиям. В дальнейшем будем рассматривать ненулевые системы подпространств. Отметим, что если система  $S = (H; H_1, \dots, H_{N+1})$  удовлетворяет условиям (Ang), и для некоторого  $k$  подпространство  $H_k = 0$ , то, как легко видеть,  $H_1 = \dots = H_{N+1} = 0$ . Таким образом, если система ненулевая, то  $H_k \neq 0$ ,  $1 \leq k \leq N+1$ .

**2.** Пусть  $S = (H; H_1, \dots, H_{N+1})$  — ненулевая система подпространств, удовлетворяющая (Ang), (Com), (Ort). Предположим,  $H_1 + \dots + H_{N+1}$  не плотно в  $H$ . Определим системы

$$S' = (H'; H_1, \dots, H_{N+1}) \quad \text{и} \quad S'' = (H \ominus H'; 0, \dots, 0),$$

где  $H' = \overline{H_1 + \dots + H_{N+1}}$ . Тогда  $S = S' \oplus S''$ ,  $S'$  удовлетворяет (Ang), (Com), (Ort) и  $S''$  является нулевой системой. Таким образом, чтобы описать все системы подпространств удовлетворяющие условиям (Ang), (Com), (Ort) достаточно описать системы, для которых сумма  $H_1 + \dots + H_{N+1}$  плотна в  $H$ .

**3.** Предположим теперь, что  $S = (H; H_1, \dots, H_{N+1})$  — система подпространств, удовлетворяющая (Ang), (Com), (Ort), такая, что  $H_k \neq 0$ ,  $1 \leq k \leq N+1$ , и сумма  $H_1 + \dots + H_{N+1}$  плотна в  $H$ . Пусть  $G = (G_{i,j}, 1 \leq i, j \leq N+1)$  — оператор Грама системы  $S$ . Тогда  $S$  унитарно эквивалентна системе  $\mathcal{G}(H_1, \dots, H_{N+1}; G)$ . Поскольку  $H_1, H_k$  расположены друг относительно друга под углом  $\theta_{\{1,k\}}$ , то оператор  $G_{1,k}/\tau_{\{1,k\}}$  унитарный. Определим унитарные операторы  $U_{0,k} : H_1 \rightarrow H_k$ ,  $1 \leq k \leq N+1$ , формулами

$$U_{0,1} = I_{H_1}, \quad U_{0,k} = G_{1,k}^*/\tau_{\{1,k\}}, \quad 2 \leq k \leq N+1$$

Положим  $B_{i,j} = U_{0,i}^* G_{i,j} U_{0,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq N+1$ , тогда  $B_{1,k} = \tau_{\{1,k\}} I_{H_1}$ ,  $2 \leq k \leq N+1$ . Определим оператор  $B : \bigoplus_{k=1}^{N+1} H_1 \rightarrow \bigoplus_{k=1}^{N+1} H_1$  блочным разложением  $B = (B_{i,j})$ . Из утверждения 2.2 следует, что  $\mathcal{G}(H_1, \dots, H_{N+1}; G)$  унитарно эквивалентна  $\mathcal{G}(H_1, \dots, H_1; B)$ , а поэтому  $S$  унитарно эквивалентна  $\mathcal{G}(H_1, \dots, H_1; B)$ .

Пусть теперь  $S = (H; H_1, \dots, H_{N+1}) = \mathcal{G}(H_0, \dots, H_0; B)$  для некоторого гильбертова пространства  $H_0$  и оператора  $B : \bigoplus_{k=1}^{N+1} H_0 \rightarrow \bigoplus_{k=1}^{N+1} H_0$  такого, что  $B_{1,k} = \tau_{\{1,k\}} I_{H_0}$ ,  $2 \leq k \leq N+1$ . Выясним, каким условиям должен удовлетворять оператор  $B$ , чтобы система подпространств  $S$  удовлетворяла (Ang), (Com), (Ort). Для этого воспользуемся результатами раздела 2.4.

Условие (Ang) равносильно унитарности операторов  $B_{1,k}/\tau_{\{1,k\}}$ ,  $2 \leq k \leq N+1$ . Поскольку  $B_{1,k} = \tau_{\{1,k\}} I_{H_0}$ , это условие выполнено.

Условие (Ort) равносильно  $B_{i,j} = 0$  для всех пар различных  $i, j$ , таких, что  $\{i, j\} \notin E \cup E_m^c$ .

Рассмотрим условие (Com). Условие  $P_{2k}P_{2k+1} = P_{2k+1}P_{2k}$ ,  $1 \leq k \leq m$ , равносильно

$$(3.1) \quad B_{2k,2k+1}B_{2k+1,i} = B_{2k,2k+1}B_{2k+1,2k}B_{2k,i} \quad 1 \leq i \leq N+1.$$

При  $i = 1$  имеем равенство  $\tau_k B_{2k,2k+1} = \tau_k B_{2k,2k+1} B_{2k+1,2k}$ , т.е.  $B_{2k,2k+1}$  — ортопроектор.

При  $i = 2k$  равенство (3.1) выполнено автоматически.

При  $i = 2k+1$  имеем  $B_{2k,2k+1} = B_{2k,2k+1} B_{2k+1,2k} B_{2k,2k+1}$ . Это условие выполнено, поскольку  $B_{2k,2k+1}$  — ортопроектор.

При  $i \neq 1, 2k, 2k+1$  обе части равенства (3.1) равны 0, следовательно, оно выполнено.

Таким образом, оператор  $B$  имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} I & \tau_1 I & \tau_1 I & \dots & \tau_m I & \tau_m I & \tau_{m+1} I & \dots & \tau_{m+r} I \\ \tau_1 I & I & Q_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tau_1 I & Q_1 & I & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tau_m I & 0 & 0 & 0 & I & Q_m & 0 & \dots & 0 \\ \tau_m I & 0 & 0 & 0 & Q_m & I & 0 & \dots & 0 \\ \tau_{m+1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \tau_{m+r} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix},$$

для некоторого набора ортопроекторов  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , в дальнейшем будем обозначать его  $B(Q_1, \dots, Q_m)$ .

Неотрицательность оператора  $B(Q_1, \dots, Q_m)$ , где  $Q_k$  — некоторый набор ортопроекторов в гильбертовом пространстве  $H_0$ , является необходимым условием того, что для данного набора ортопроекторов можно применить  $G$ -конструкцию. Для изучения вопроса, когда оператор такого вида неотрицателен, нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 3.2.** Пусть  $K$  — гильбертово пространство,  $A_1, \dots, A_n$  — неотрицательные обратимые операторы в  $K$ . Пусть  $y \in K$  и  $\mu_k > 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Если  $u_k \in K$ ,  $1 \leq k \leq n$ , и  $\sum_{k=1}^n \mu_k u_k = y$ , то

$$\sum_{k=1}^n \langle A_k u_k, u_k \rangle \geq \left\langle \left( \sum_{j=1}^n \mu_j^2 A_j^{-1} \right)^{-1} y, y \right\rangle,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$u_k = \mu_k A_k^{-1} \left( \sum_{j=1}^n \mu_j^2 A_j^{-1} \right)^{-1} y, \quad 1 \leq k \leq n.$$

*Доказательство.* Обозначим  $F(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n \langle A_k u_k, u_k \rangle$ . Рассмотрим

$$F(u_1 + h_1, \dots, u_n + h_n) - F(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n (\langle A_k u_k, h_k \rangle + \langle A_k h_k, u_k \rangle + \langle A_k h_k, h_k \rangle).$$

Если  $u_1, \dots, u_n \in K$  таковы, что

$$(3.2) \quad \sum_{k=1}^n \mu_k u_k = y, \quad \mu_1^{-1} A_1 u_1 = \dots = \mu_n^{-1} A_n u_n,$$

то для произвольных  $h_1, \dots, h_n \in K$ , таких, что  $\sum_{k=1}^n \mu_k h_k = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \langle A_k u_k, h_k \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle \mu_k^{-1} A_k u_k, \mu_k h_k \rangle = 0, \\ \sum_{k=1}^n \langle A_k h_k, u_k \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle \mu_k h_k, \mu_k^{-1} A_k u_k \rangle = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$F(u_1 + h_1, \dots, u_n + h_n) - F(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n \langle A_k h_k, h_k \rangle.$$

Отсюда  $F(u_1 + h_1, \dots, u_n + h_n) \geq F(u_1, \dots, u_n)$  и равенство достигается тогда и только тогда, когда  $h_1 = \dots = h_n = 0$ , т.е.  $F(v_1, \dots, v_n) \geq F(u_1, \dots, u_n)$  для произвольных  $v_1, \dots, v_n \in K$ , таких, что  $\sum_{k=1}^n \mu_k v_k = y$ , и равенство достигается тогда и только тогда, когда  $v_k = u_k$  для всех  $1 \leq k \leq n$ .

Найдем  $u_1, \dots, u_n$ , удовлетворяющие (3.2). Пусть  $\mu_k^{-1} A_k u_k = x$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Тогда  $u_k = \mu_k A_k^{-1} x$ . Имеем:  $\sum_{k=1}^n \mu_k u_k = \sum_{k=1}^n \mu_k^2 A_k^{-1} x = y$ , откуда  $x = (\sum_{k=1}^n \mu_k^2 A_k^{-1})^{-1} y$ . Таким образом,  $u_k = \mu_k A_k^{-1} (\sum_{j=1}^n \mu_j^2 A_j^{-1})^{-1} y$ ,  $1 \leq k \leq n$ , и

$$F(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n \left\langle \mu_k \left( \sum_{j=1}^n \mu_j^2 A_j^{-1} \right)^{-1} y, \mu_k A_k^{-1} \left( \sum_{j=1}^n \mu_j^2 A_j^{-1} \right)^{-1} y \right\rangle = \left\langle \left( \sum_{j=1}^n \mu_j^2 A_j^{-1} \right)^{-1} y, y \right\rangle.$$

□

Предыдущая лемма позволяет доказать следующее утверждение.

**Утверждение 3.1.** Пусть

$$\xi(\tau) = 1 - \sum_{k=1}^{m+r} \tau_k^2.$$

Оператор  $B = B(Q_1, \dots, Q_m)$  неотрицателен тогда и только тогда, когда

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^m \tau_k^2 R_k \leq \xi(\tau) I,$$

где  $R_k = I - Q_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

*Доказательство.* Запишем условие неотрицательности

$$\langle Bx, x \rangle \geq 0, \quad x = (z, x_1, y_1, \dots, x_m, y_m, v_1, \dots, v_r) \in \oplus_{k=1}^{N+1} H_0.$$

Обозначим

$$z_0 = z_0(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m, v_1, \dots, v_r) = \sum_{k=1}^m \tau_k (x_k + y_k) + \sum_{k=1}^r \tau_{k+m} v_k,$$

$$B_0 = B_0(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) = \sum_{k=1}^m (\|x_k\|^2 + \|y_k\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle Q_k x_k, y_k \rangle),$$

тогда имеем условие:

$$\langle Bx, x \rangle = \|z\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle z, z_0 \rangle + B_0 + \sum_{k=1}^r \|v_k\|^2 \geq 0.$$

Это условие эквивалентно условию

$$\|z + z_0\|^2 - \|z_0\|^2 + B_0 + \sum_{k=1}^r \|v_k\|^2 \geq 0.$$

Левая часть этого неравенства достигает наименьшего значения по  $z$  при  $z = -z_0$ . Таким образом, оператор  $B$  неотрицателен тогда и только тогда, когда

$$(3.4) \quad -\|z_0\|^2 + B_0 + \sum_{k=1}^r \|v_k\|^2 \geq 0.$$

Пусть

$$(3.5) \quad z_k = \frac{x_k + y_k}{2}, \delta_k = \frac{x_k - y_k}{2},$$

тогда  $x_k = z_k + \delta_k$  и  $y_k = z_k - \delta_k$ . Ясно, что

$$(3.6) \quad z_0 = 2 \sum_{k=1}^m \tau_k z_k + \sum_{k=1}^r \tau_{k+m} v_r.$$

Кроме того,

$$(3.7) \quad \|x_k\|^2 + \|y_k\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle Q_k x_k, y_k \rangle = \|R_k x_k\|^2 + \|R_k y_k\|^2 + \|Q_k(x_k + y_k)\|^2 \\ = 2\|R_k z_k\|^2 + 2\|R_k \delta_k\|^2 + 4\|Q_k z_k\|^2 = \langle (2I + 2Q_k)z_k, z_k \rangle + 2\|R_k \delta_k\|^2.$$

Используя равенства (3.6), (3.7), перепишем (3.4) в виде

$$\sum_{k=1}^m \langle 2(I + Q_k)z_k, z_k \rangle + \sum_{k=1}^r \|v_k\|^2 - \|2 \sum_{k=1}^m \tau_k z_k + \sum_{k=1}^r \tau_{k+m} v_k\|^2 + 2 \sum_{k=1}^m \|R_k \delta_k\|^2 \geq 0.$$

Полученное неравенство выполнено для всех  $z_1, \dots, z_m, \delta_1, \dots, \delta_m, v_1, \dots, v_r$ , тогда и только тогда, когда неравенство

$$(3.8) \quad \sum_{k=1}^m \langle 2(I + Q_k)z_k, z_k \rangle + \sum_{k=1}^r \|v_k\|^2 \geq \|2 \sum_{k=1}^m \tau_k z_k + \sum_{k=1}^r \tau_{k+m} v_k\|^2.$$

выполнено для всех  $z_1, \dots, z_m, v_1, \dots, v_r$ .

Зафиксируем  $2 \sum_{k=1}^m \tau_k z_k + \sum_{k=1}^r \tau_{k+m} v_k = y$  и обозначим

$$A_k = \begin{cases} 2(I + Q_k), & 1 \leq k \leq m \\ I, & m+1 \leq k \leq m+r, \end{cases} \quad \mu_k = \begin{cases} 2\tau_k, & 1 \leq k \leq m \\ \tau_k, & m+1 \leq k \leq m+r \end{cases}$$

Из леммы 3.2 следует, что наименьшее значение левой части (3.8) (при фиксированном  $y$ ) равно  $\langle (\sum_{k=1}^{m+r} \mu_k^2 A_k^{-1})^{-1} y, y \rangle$ . Таким образом, оператор  $B$  неотрицателен тогда и только тогда, когда

$$(3.9) \quad \left( \sum_{k=1}^{m+r} \mu_k^2 A_k^{-1} \right)^{-1} \geq I, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^{m+r} \mu_k^2 A_k^{-1} \leq I.$$

Поскольку  $(2(I + Q_k))^{-1} = \frac{1}{4}(I + R_k)$ , то

$$\sum_{k=1}^{m+r} \mu_k^2 A_k^{-1} = \sum_{k=1}^m 4\tau_k^2 \cdot \frac{1}{4}(I + R_k) + \sum_{k=m+1}^{m+r} \tau_k^2 I = \sum_{k=1}^{m+r} \tau_k^2 I + \sum_{k=1}^m \tau_k^2 R_k.$$

Поэтому (3.9) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{m+r} \tau_k^2 I + \sum_{k=1}^m \tau_k^2 R_k \leq I, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^m \tau_k^2 R_k \leq \left( 1 - \sum_{k=1}^{m+r} \tau_k^2 \right) I.$$

□

Следующее утверждение дает описание  $\operatorname{Ker} B$  и следует из доказательства утверждения 3.1 и леммы 3.2. Напомним, что  $z_k, \delta_k, 1 \leq k \leq m$ , определены формулами (3.5).

**Утверждение 3.2.** Пусть выполнено (3.3). Элемент  $x = (z, x_1, y_1, \dots, x_m, y_m, v_1, \dots, v_r)$  принадлежит  $\operatorname{Ker} B$  тогда и только тогда, когда

- (1)  $z = -(2 \sum_{k=1}^m \tau_k z_k + \sum_{k=1}^r \tau_{k+m} v_k)$ ;
- (2)  $\delta_k \in \operatorname{Im} Q_k = \operatorname{Ker} R_k$  для всех  $1 \leq k \leq m$ ;

$$(3) \quad z_k = \frac{1}{2}\tau_k(I + R_k)y, \quad 1 \leq k \leq m, \quad \text{и} \quad v_k = \tau_{k+m}y, \quad 1 \leq k \leq r, \quad \text{где} \quad y \in \text{Ker}(\xi(\tau)I - \sum_{k=1}^m \tau_k^2 R_k).$$

**Следствие 3.1.** Пусть выполнено (3.3) и  $H_0$  конечномерно. Тогда

$$(3.10) \quad \dim \text{Ker } B = \sum_{k=1}^m \dim \text{Im } Q_k + \dim \text{Ker}(\xi(\tau)I - \sum_{k=1}^m \tau_k^2 R_k).$$

Критерий унитарной эквивалентности (утверждение 2.2) для рассматриваемых систем можно сформулировать в терминах ортопроекторов  $Q_1, \dots, Q_m$ .

**Утверждение 3.3.** Системы подпространств

$$\mathcal{G}(H_0, \dots, H_0; B(Q_1, \dots, Q_m)) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}(H'_0, \dots, H'_0; B(Q'_1, \dots, Q'_m))$$

унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда наборы ортопроекторов  $Q_k, 1 \leq k \leq m$ , и  $Q'_k, 1 \leq k \leq m$ , унитарно эквивалентны;

Таким образом, используя  $G$ -конструкцию систем подпространств, мы установили взаимно однозначное соответствие между ненулевыми системами подпространств  $S$ , удовлетворяющими (Ang), (Com), (Ort), такими, что  $H_1 + \dots + H_{N+1}$  плотно в  $H$ , и наборами  $m$  ортопроекторов  $R_1, \dots, R_m$  в некотором гильбертовом пространстве  $H_0$ , удовлетворяющими неравенству (3.3) (при этом системы подпространств и наборы операторов рассматриваются с точностью до унитарной эквивалентности).

Отметим, что необходимым условием выполнения (3.3) является  $\xi(\tau) \geq 0$ . Поэтому если  $\xi(\tau) < 0$ , то не существует ненулевой системы подпространств  $S$ , удовлетворяющей (Ang), (Com), (Ort). В дальнейшем мы предполагаем, что  $\xi(\tau) \geq 0$ .

**3.2. Описание всех неприводимых унитарно неэквивалентных систем  $S$ , удовлетворяющих (Ang), (Com), (Ort).** Перед тем как перейти к описанию всех неприводимых систем подпространств, отметим, что

- с точностью до унитарной эквивалентности существует единственная нулевая неприводимая система подпространств  $S = (\mathbb{C}^1; 0, \dots, 0)$ ;
- для любой ненулевой неприводимой системы подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_{N+1})$   $H_1 + \dots + H_{N+1}$  плотно в  $H$ .

Кроме того, критерий неприводимости (утверждение 2.5) рассматриваемых систем в терминах ортопроекторов  $Q_1, \dots, Q_m$  может быть сформулирован в следующем виде.

**Утверждение 3.4.** Система подпространств  $\mathcal{G}(H_0, \dots, H_0; B(Q_1, \dots, Q_m))$  неприводима тогда и только тогда, когда набор ортопроекторов  $Q_k, 1 \leq k \leq m$ , неприводим.

Поэтому с точностью до унитарной эквивалентности все ненулевые неприводимые системы подпространств, удовлетворяющие условиям (Ang), (Com), (Ort) имеют вид  $S = \mathcal{G}(H_0, \dots, H_0; B(Q_1, \dots, Q_m))$ , где  $H_0$  — гильбертово пространство,  $Q_1, \dots, Q_m$  — неприводимая семья ортопроекторов в  $H_0$ , такая, что для ортопроекторов  $R_k = I - Q_k, 1 \leq k \leq m$ , выполнено неравенство (3.3).

Учитывая, что системы  $S$  и  $S'$  унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда унитарно эквивалентны наборы ортопроекторов  $Q_1, \dots, Q_m$  и  $Q'_1, \dots, Q'_m$ , задача описания всех неприводимых унитарно неэквивалентных ненулевых систем подпространств  $S$ , удовлетворяющих (Ang), (Com), (Ort), эквивалентна задаче об описании неприводимых унитарно неэквивалентных наборов ортопроекторов  $R_1, \dots, R_m$ , удовлетворяющих (3.3).

Если  $\xi(\tau) = 0$ , то  $R_1 = \dots = R_m = 0$ , т.е.  $Q_1 = \dots = Q_m = I$ . Поскольку набор  $R_1, \dots, R_m$  неприводим, то  $H_0 = \mathbb{C}^1$ . Используя формулу (3.10), получим  $\dim \text{Ker } B = m + 1$ . Непосредственно из определения  $G$ -конструкции системы подпространств следует, что  $\dim H = (N + 1) - (m + 1) = m + r$ ,  $\dim H_k = \dim H_0 = 1$  для всех  $1 \leq k \leq N + 1$ . Поэтому обобщенная размерность системы  $S$  равна  $(m + r; 1)$ .

Рассмотрим случай  $\xi(\tau) > 0$ .

Множество индексов  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  разобьем на три части

$$M_l = \{k \in M \mid \tau_k^2 < \xi(\tau)\}, \quad M_e = \{k \in M \mid \tau_k^2 = \xi(\tau)\}, \quad M_g = \{k \in M \mid \tau_k^2 > \xi(\tau)\}.$$

Без ограничения общности, будем считать, что для любых  $k_1 \in M_l$ ,  $k_2 \in M_e$  и  $k_3 \in M_g$ , выполнены неравенства  $k_1 < k_2 < k_3$ .

Если  $i \in M_g$ , то, очевидно,  $R_i = 0$ .

Если  $i \in M_e$ , то  $R_i R_j = 0$  для всех  $j \neq i$ . Поскольку набор  $R_1, \dots, R_m$  неприводим, то  $R_i = 0$  или  $R_i = I$ . Если  $R_i = I$ , то  $R_j = 0$  для всех  $j \neq i$ .

Предположим, для некоторого  $i \in M_e$   $R_i = I$  и  $R_j = 0$ ,  $j \neq i$ . Из неприводимости набора  $R_1, \dots, R_m$  следует, что  $H_0 = \mathbb{C}^1$ . Используя равенство (3.10), получим  $\dim \text{Ker } B = m$ . Поэтому  $\dim H = (N + 1) - m = m + r + 1$ ,  $\dim H_k = 1$  для всех  $1 \leq k \leq N + 1$ . Поэтому обобщенная размерность системы  $S$  равна  $(m + r + 1; 1)$ .

Таким образом, мы получили  $|M_e|$  неприводимых унитарно неэквивалентных ненулевых систем подпространств  $S$ , удовлетворяющих  $(\text{Ang})$ ,  $(\text{Com})$ ,  $(\text{Ort})$ , соответствующих элементам  $i \in M_e$ . Осталось рассмотреть случай, когда  $R_i = 0$  для всех  $i \in M_e$ . Тогда (3.3) можно переписать в виде

$$(3.11) \quad \sum_{k \in M_l} \tau_k^2 R_k \leq \xi(\tau) I.$$

Рассмотрим следующие варианты для  $|M_l|$ .

**1.** Пусть  $|M_l| \geq 3$ . Хорошо известно, что задача описания с точностью до унитарной эквивалентности неприводимой  $n$ -ки ортопроекторов при  $n \geq 3$  не менее сложна, чем задача описания с точностью до унитарной эквивалентности неприводимой пары ограниченных самосопряженных операторов, т.е является  $*$ -дикой (см., например, [5]). Для исследования неравенства (3.11) нам понадобится «усиленный» вариант утверждения о  $*$ -дикости.

**Лемма 3.3.** Для любого  $\varepsilon > 0$  задача описания неприводимых троек ортопроекторов  $R_1, R_2, R_3$  с точностью до унитарной эквивалентности, удовлетворяющих условию

$$R_1 + R_2 + R_3 \leq (1 + \varepsilon) I$$

является  $*$ -дикой задачей.

*Доказательство.* Пусть гильбертово пространство  $L = l_2$ . Определим  $K = L \oplus L \oplus L$ . Для трех операторов  $B_{1,2}, B_{1,3}, B_{2,3}$  в  $L$  определим тройку подпространств  $K$

$$K_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in L\}, \quad K_2 = \{(B_{1,2}x, x, 0) \mid x \in L\}, \quad K_3 = \{(B_{1,3}x, B_{2,3}x, x) \mid x \in L\}.$$

Пусть  $R_i$  — ортопроектор на  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Если  $\|B_{1,2}\|, \|B_{1,3}\|, \|B_{2,3}\| \rightarrow 0$ , то  $\|R_1 + R_2 + R_3 - I_K\| \rightarrow 0$  (это следует из формул для  $R_i$ , приведенных в [6], лемма 3). Поэтому существует  $\alpha > 0$ , такое, что если нормы  $\|B_{1,2}\|, \|B_{1,3}\|, \|B_{2,3}\|$  не больше  $2\alpha$ , то  $R_1 + R_2 + R_3 \leq (1 + \varepsilon) I_K$ .

Для пары самосопряженных операторов  $A, B : L \rightarrow L$  с нормами  $\|A\| \leq \alpha$  и  $\|B\| \leq \alpha$  определим  $B_{1,2} = \alpha I_L$ ,  $B_{2,3} = \alpha I_L$ ,  $B_{1,3} = A + iB$ . Проверим справедливость следующих утверждений:

**1.** Если пара  $\{A, B\}$  неприводима, то тройка ортопроекторов  $\{R_1, R_2, R_3\}$  неприводима. Действительно, предположим противное. Тогда существует унитарный оператор  $U : K \rightarrow K$ , отличный от  $\lambda I_K$ ,  $|\lambda| = 1$ , такой, что  $UR_i = R_i U$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Из теоремы 2 работы [6] следует, что  $U = \text{diag}(U_1, U_2, U_3)$ , где унитарные операторы  $U_i : L \rightarrow L$  удовлетворяют и  $U_j B_{j,k} = B_{j,k} U_k$  при  $j < k$ . Подставляя  $(j, k) = (1, 2)$  имеем  $U_1 = U_2$ . Подставляя  $(j, k) = (2, 3)$  имеем  $U_2 = U_3$ . Из равенства  $U_1 B_{1,3} = B_{1,3} U_3$  получаем:  $U_1 A = A U_1$  и  $U_1 B = B U_1$ . Поэтому  $U_1 = \lambda I_L$ ,  $|\lambda| = 1$ , а тогда  $U = \lambda I_K$ . Получили противоречие.

**2.** Если пары  $\{A, B\}$  и  $\{A', B'\}$  унитарно неэквивалентны, то построенные по ним тройки ортопроекторов  $\{R_1, R_2, R_3\}$  и  $\{R'_1, R'_2, R'_3\}$  унитарно неэквивалентны. Действительно, предположим противное. Тогда существует унитарный оператор  $U : K \rightarrow K$ , такой, что



$UR_i = R'_i U$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Из теоремы 2 работы [6] следует, что  $U = \text{diag}(U_1, U_2, U_3)$ , где унитарные операторы  $U_i : L \rightarrow L$  удовлетворяют  $U_j B_{j,k} = B'_{j,k} U_k$  для всех  $j < k$ . Подставив  $(j, k) = (1, 2)$  имеем  $U_1 = U_2$ . Подставив  $(j, k) = (2, 3)$  имеем  $U_2 = U_3$ . Из равенства  $U_1 B_{1,3} = B'_{1,3} U_3$  имеем  $U_1 A U_1^* = A'$  и  $U_1 B U_1^* = B'$ . Получили противоречие.

Итак, начальная задача содержит «безнадежную» задачу описания неприводимых унитарно неэквивалентных пар самосопряженных операторов  $A, B$  в пространстве  $L = l_2$ , а потому и сама «безнадежна».  $\square$

Поскольку  $|M_l| \geq 3$ , то  $1, 2, 3 \in M_l$ . Обозначим  $\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$  и пусть  $\varepsilon = \frac{\xi(\tau)}{\tau_{\max}^2} - 1 > 0$ . Пусть  $R_k = 0$  при  $k \in M_l$ ,  $k \geq 4$ . Для любых трех проекторов  $R_1, R_2, R_3$ , таких, что

$$R_1 + R_2 + R_3 \leq (1 + \varepsilon)I$$

получим

$$\tau_1^2 R_1 + \tau_2^2 R_2 + \tau_3^2 R_3 \leq \tau_{\max}^2 (R_1 + R_2 + R_3) \leq \xi(\tau)I.$$

Таким образом, в случае  $|M_l| \geq 3$  задача описания неприводимых унитарно неэквивалентных наборов ортопроекторов  $R_1, \dots, R_m$ , удовлетворяющих (3.11), содержит подзадачу, которая, как мы показали в предыдущей лемме, «безнадежна», следовательно и сама задача «безнадежна».

**2.** Пусть  $M_l = \emptyset$ . Тогда  $R_1 = \dots = R_m = 0$ , т.е.  $Q_1 = \dots = Q_m = I$ . Поскольку набор  $R_1, \dots, R_m$  неприводим,  $H_0 = \mathbb{C}^1$ . Используя равенство (3.10), получим  $\dim \text{Ker } B = m$ . Тогда  $\dim H = (N+1) - m = m + r + 1$ ;  $\dim H_k = 1$  для всех  $1 \leq k \leq N+1$ . Таким образом, обобщенная размерность системы  $S$  равна  $(m + r + 1; 1)$ .

**3.** Пусть  $|M_l| = 1$ . Тогда (3.11) принимает вид  $\tau_1^2 R_1 \leq \xi(\tau)I$ . Поскольку  $\tau_1^2 < \xi(\tau)$ , это неравенство выполнено для любого ортопроектора  $R_1$ . Поскольку набор  $R_1, \dots, R_m$  неприводим и  $R_2 = \dots = R_m = 0$ , то  $H_0 = \mathbb{C}^1$  и либо  $R_1 = 0$ , либо  $R_1 = I$ .

В случае  $R_1 = 0$  имеем  $Q_1 = \dots = Q_m = I$ . Используя равенство (3.10), получим  $\dim \text{Ker } B = m$ . Тогда  $\dim H = (N+1) - m = m + r + 1$ ,  $\dim H_k = 1$  для всех  $1 \leq k \leq N+1$ . Поэтому обобщенная размерность системы  $S$  равна  $(m + r + 1; 1)$ .

В случае  $R_1 = I$ ,  $R_2 = \dots = R_m = 0$ , имеем  $Q_1 = 0$ ,  $Q_2 = \dots = Q_m = I$ . Используя равенство (3.10), получим  $\dim \text{Ker } B = m - 1$ . Поэтому  $\dim H = (N+1) - (m-1) = m + r + 2$ ,  $\dim H_k = 1$  при всех  $1 \leq k \leq N+1$ . Обобщенная размерность системы  $S$  равна  $(m + r + 2; 1)$ .

**4.** Пусть  $|M_l| = 2$ . В этом случае неравенство (3.11) будет записано как

$$(3.12) \quad \tau_1^2 R_1 + \tau_2^2 R_2 \leq \xi(\tau)I.$$

Хорошо известно следующее описание всех (не обязательно удовлетворяющих (3.12)) неприводимых пар ортопроекторов  $R_1, R_2$  в гильбертовом пространстве  $H_0$  с точностью до унитарной эквивалентности (см., например, [3]). Все такие пары ортопроекторов можно разделить на

(1) четыре неприводимых пары ортопроекторов в  $H_0 = \mathbb{C}^1$ :

$$\begin{aligned} \pi_{00} : R_1 = 0, R_2 = 0; & \quad \pi_{01} : R_1 = 0, R_2 = I; \\ \pi_{10} : R_1 = I, R_2 = 0; & \quad \pi_{11} : R_1 = I, R_2 = I; \end{aligned}$$

(2) семейство пар  $\pi_\varphi$ ,  $\varphi \in (0, \pi/2)$  в  $H_0 = \mathbb{C}^2$ :

$$(3.13) \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix},$$

Из этих пар нам нужно выбрать те, для которых выполнено неравенство (3.12). Рассмотрим следующие варианты.

**4.1.** В случае  $H_0 = \mathbb{C}^1$ ,  $R_1 = R_2 = 0$  неравенство (3.12) выполнено, обобщенная размерность системы  $S$  равна  $(m + r + 1; 1)$ , так как  $\dim \text{Ker } B = m$ .

**4.2.** Если  $H_0 = \mathbb{C}^1$ ,  $R_1 = I$  и  $R_2 = 0$  или  $R_1 = 0$  и  $R_2 = I$ , то неравенство (3.12) выполнено и обобщенная размерность системы  $S$  равна  $(m + r + 2; 1)$ , так как  $\dim \text{Ker } B = m - 1$

**4.3.** Пусть  $H_0 = \mathbb{C}^1$ ,  $R_1 = R_2 = I$ . Неравенство (3.12) выполнено тогда и только тогда, когда  $\xi(\tau) \geq \tau_1^2 + \tau_2^2$ . В этом случае обобщенная размерность  $S$  равна

- (1)  $(m + r + 2; 1)$  если  $\xi(\tau) = \tau_1^2 + \tau_2^2$ , так как  $\dim \text{Ker } B = m - 1$ ;
- (2)  $(m + r + 3; 1)$  если  $\xi(\tau) > \tau_1^2 + \tau_2^2$ , так как  $\dim \text{Ker } B = m - 2$ .

**4.4.** Рассмотрим ситуацию, когда  $H_0 = \mathbb{C}^2$  и ортопроекторы  $R_1, R_2$  заданы формулами (3.13),  $\varphi \in (0, \pi/2)$ . Неравенство (3.12) выполнено тогда и только тогда, когда  $(2 \times 2)$ -матрица (оператор)

$$M = \xi(\tau)I - \tau_1^2 R_1 - \tau_2^2 R_2 = \begin{pmatrix} \xi(\tau) - \tau_1^2 - \tau_2^2 \cos^2 \varphi & -\tau_2^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ -\tau_2^2 \cos \varphi \sin \varphi & \xi(\tau) - \tau_2^2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена. Это равносильно тому, что диагональные элементы и определитель матрицы  $M$  неотрицательны. Элемент  $(M)_{1,1} \geq 0$  тогда и только тогда, когда

$$\cos^2 \varphi \leq \frac{\xi(\tau) - \tau_1^2}{\tau_2^2}.$$

Элемент  $(M)_{2,2} > 0$  при любом  $\varphi$ . Легко проверить, что определитель

$$\det M = (\xi(\tau) - \tau_1^2)(\xi(\tau) - \tau_2^2) - \tau_1^2 \tau_2^2 \cos^2 \varphi.$$

Поэтому условие  $\det M \geq 0$  можно переписать в виде

$$\cos^2 \varphi \leq \frac{\xi(\tau) - \tau_1^2}{\tau_2^2} \frac{\xi(\tau) - \tau_2^2}{\tau_1^2} = \eta(\tau).$$

Рассмотрим следующие варианты.

**4.4.1.** Предположим, что  $\xi(\tau) \geq \tau_1^2 + \tau_2^2$ . Тогда для произвольного  $\varphi \in (0, \pi/2)$  матрица  $M$  положительно определена. Используя формулу (3.10), получаем  $\dim \text{Ker } B = 1 + 1 + 2(m - 2) = 2m - 2$ . Поэтому  $\dim H = 2(N + 1) - (2m - 2) = 2m + 2r + 4$ ,  $\dim H_k = \dim H_0 = 2$  при всех  $1 \leq k \leq N + 1$ . Обобщенная размерность системы  $S$  равна  $(2m + 2r + 4; 2)$ .

**4.4.2.** Предположим, что  $\xi(\tau) < \tau_1^2 + \tau_2^2$ . Определим угол

$$\varphi(\tau) = \arccos \sqrt{\eta(\tau)} \in (0, \pi/2).$$

Матрица  $M$  неотрицательно определена тогда и только тогда, когда  $\varphi \in [\varphi(\tau), \pi/2)$ .

Если  $\varphi \in (\varphi(\tau), \pi/2)$ , то  $M$  положительно определена и обобщенная размерность  $S$  равна  $(2m + 2r + 4; 2)$ .

Если  $\varphi = \varphi(\tau)$ , то  $\text{Ker } M$  одномерно, поэтому  $\dim \text{Ker } B = 2m - 1$  и обобщенная размерность  $S$  равна  $(2m + 2r + 3; 2)$ .

**3.3. Классификационная теорема.** Сформулируем результаты, полученные в подразделе 3.2 в виде теоремы.

**Теорема 3.1.** Если  $\xi(\tau) < 0$ , то не существует ненулевой системы подпространств  $S$ , удовлетворяющей  $(Ang)$ ,  $(Com)$ ,  $(Ort)$ .

В случае  $\xi(\tau) = 0$  с точностью до унитарной эквивалентности существует единственная ненулевая неприводимая система подпространств  $S$ , удовлетворяющая условиям  $(Ang)$ ,  $(Com)$ ,  $(Ort)$ . Ее обобщенная размерность равна  $(m + r; 1)$ .

В случае  $\xi(\tau) > 0$  с точностью до унитарной эквивалентности все ненулевые неприводимые системы подпространств  $S$ , удовлетворяющие  $(Ang)$ ,  $(Com)$ ,  $(Ort)$ , описываются следующим образом.

- (1)  $M_l = \emptyset$  :
  - (a)  $|M_e| + 1$  систем обобщенной размерности  $(m + r + 1; 1)$ .
- (2)  $|M_l| = 1$  :
  - (a)  $|M_e| + 1$  систем обобщенной размерности  $(m + r + 1; 1)$ ;

- (b) одна система обобщенной размерности  $(m + r + 2; 1)$ .
- (3)  $|M_l| = 2$ ,  $\sum_{k \in M_l} \tau_k^2 > \xi(\tau)$  :
- (a)  $|M_e| + 1$  систем обобщенной размерности  $(m + r + 1; 1)$ ;
  - (b) две системы обобщенной размерности  $(m + r + 2; 1)$ ;
  - (c) бесконечная семья систем обобщенной размерности  $(2m + 2r + 4; 2)$ , параметризованная углом  $\varphi \in (\varphi(\tau), \pi/2)$ , где  $\varphi(\tau) \in (0, \pi/2)$ ;
  - (d) одна система обобщенной размерности  $(2m + 2r + 3; 2)$ , соответствующая углу  $\varphi = \varphi(\tau)$ .
- (4)  $|M_l| = 2$  и  $\sum_{k \in M_l} \tau_k^2 = \xi(\tau)$  :
- (a)  $|M_e| + 1$  систем обобщенной размерности  $(m + r + 1; 1)$ ;
  - (b) три системы обобщенной размерности  $(m + r + 2; 1)$ ;
  - (c) бесконечная семья систем обобщенной размерности  $(2m + 2r + 4; 2)$ , параметризованная углом  $\varphi \in (0, \pi/2)$ .
- (5)  $|M_l| = 2$  и  $\sum_{k \in M_l} \tau_k^2 < \xi(\tau)$  :
- (a)  $|M_e| + 1$  систем обобщенной размерности  $(m + r + 1; 1)$ ;
  - (b) две системы обобщенной размерности  $(m + r + 2; 1)$ ;
  - (c) одна система обобщенной размерности  $(m + r + 3; 1)$ ;
  - (d) бесконечная семья систем обобщенной размерности  $(2m + 2r + 4; 2)$ , параметризованная углом  $\varphi \in (0, \pi/2)$ .

Если  $|M_l| \geq 3$ , то задача описания всех неприводимых унитарно неэквивалентных систем  $S$ , удовлетворяющих  $(Ang)$ ,  $(Com)$ ,  $(Ort)$ , является  $*$ -дикой.

**Следствие 3.2.** Если  $m \geq 3$  и  $\tau_k < 1/\sqrt{m+r+1}$  для  $k = 1, 2, \dots, m+r$ , то задача описания всех неприводимых унитарно неэквивалентных систем подпространств  $S$ , удовлетворяющих  $(Ang)$ ,  $(Com)$ ,  $(Ort)$ , является  $*$ -дикой.

**3.4. Пример.** В качестве примера дадим описание с точностью до унитарной эквивалентности всех ненулевых неприводимых систем подпространств  $S = (H; H_1, \dots, H_8)$ , удовлетворяющих условиям  $(Ang)$ ,  $(Com)$ ,  $(Ort)$ , в случае, когда  $m = 3$ ,  $r = 1$ , а функция  $\tau = \tau(\tau_0)$ ,  $\tau_0 \in (0, 1/3)$ , задана равенствами  $\tau_1 = \tau_0$ ,  $\tau_2 = \sqrt{2}\tau_0$ ,  $\tau_3 = 2\tau_0$ ,  $\tau_4 = 3\tau_0$ . В рассматриваемом случае  $\xi(\tau) = 1 - 16\tau_0^2$ .

Если  $\tau_0 \in (0, 1/\sqrt{20})$ , то задача описания всех неприводимых унитарно неэквивалентных систем  $S$ , удовлетворяющих  $(Ang)$ ,  $(Com)$ ,  $(Ort)$ , является  $*$ -дикой.

На отрезке  $\tau_0 \in [1/\sqrt{20}, 1/4]$  с точностью до унитарной эквивалентности все ненулевые неприводимые системы подпространств  $S$ , удовлетворяющие  $(Ang)$ ,  $(Com)$ ,  $(Ort)$ , описываются следующим образом.

- (1)  $\tau_0 = 1/\sqrt{20}$  :
- (a) две системы обобщенной размерности  $(5; 1)$ ;
  - (b) две системы обобщенной размерности  $(6; 1)$ ;
  - (c) одна система обобщенной размерности  $(7; 1)$ ;
  - (d) бесконечная семья систем обобщенной размерности  $(12; 2)$ , параметризованная углом  $\varphi \in (0, \pi/2)$ .
- (2)  $\tau_0 \in (1/\sqrt{20}, 1/\sqrt{19})$  :
- (a) одна система обобщенной размерности  $(5; 1)$ ;
  - (b) две системы обобщенной размерности  $(6; 1)$ ;
  - (c) одна система обобщенной размерности  $(7; 1)$ ;
  - (d) бесконечная семья систем обобщенной размерности  $(12; 2)$ , параметризованная углом  $\varphi \in (0, \pi/2)$ .
- (3)  $\tau_0 = 1/\sqrt{19}$  :
- (a) одна система обобщенной размерности  $(5; 1)$ ;

- (b) три системы обобщенной размерности  $(6; 1)$ ;
- (c) бесконечная семья систем обобщенной размерности  $(12; 2)$ , параметризованная углом  $\varphi \in (0, \pi/2)$ .
- (4)  $\tau_0 \in (1/\sqrt{19}, 1/\sqrt{18})$  :
  - (a) одна система обобщенной размерности  $(5; 1)$ ;
  - (b) две системы обобщенной размерности  $(6; 1)$ ;
  - (c) бесконечная семья систем обобщенной размерности  $(12; 2)$ , параметризованная углом  $\varphi \in (\varphi(\tau), \pi/2)$ , где

$$\varphi(\tau) = \arccos \left( \frac{(1 - 17\tau_0^2)(1 - 18\tau_0^2)}{2\tau_0^4} \right)^{1/2} \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

- (d) одна система обобщенной размерности  $(11; 2)$ . Этой системе соответствует угол  $\varphi = \varphi(\tau)$ .
- (5)  $\tau_0 = 1/\sqrt{18}$  :
  - (a) две системы обобщенной размерности  $(5; 1)$ ;
  - (b) одна система обобщенной размерности  $(6; 1)$ .
- (6)  $\tau_0 \in (1/\sqrt{18}, 1/\sqrt{17})$  :
  - (a) одна система обобщенной размерности  $(5; 1)$ ;
  - (b) одна система обобщенной размерности  $(6; 1)$ .
- (7)  $\tau_0 = 1/\sqrt{17}$  :
  - (a) две системы обобщенной размерности  $(5; 1)$ ;
- (8)  $\tau_0 \in (1/\sqrt{17}, 1/4)$  :
  - (a) одна система обобщенной размерности  $(5; 1)$ ;
- (9)  $\tau_0 = 1/4$  :
  - (a) одна система обобщенной размерности  $(4; 1)$ ;

Если  $\tau_0 \in (1/4, 1/3)$ , то не существует ненулевой системы подпространств  $S$ , удовлетворяющей (Ang), (Com), (Ort).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space*, Colloquia Mathematica Societatis Ianos Bolyai, 5 Hilbert space operators, Tihany (Hungary), 1970, 163–237.
- [2] J.J. Graham, *Modular representations of Hecke algebras and related algebras*, Ph.D. thesis, Univ. Sydney, 1995.
- [3] P.R. Halmos, *Two subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **144** (1969), 381–389.
- [4] S.A. Kruglyak, Yu.S. Samoilenko, *On complexity of description of representations of \*-algebras generated by idempotents*, Proc. Am. Math. Soc., **128**:6 (2000), 1655–1664.
- [5] V. Ostrovskii, Yu. Samoilenko, *Introduction to the Theory Representation of Finitely Presented \*-algebras. 1. Representations by bounded operators*, Rev. Math. & Math. Phys., Vol. 11, 1–261, Gordon and Breach, 1999.
- [6] V.S. Sunder, *N subspaces*, Can. J. Math., **4** (1988), 38–54.
- [7] H.N.V. Temperley, E.H. Lieb, *Relations between 'percolations' and 'colouring' problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem*, J. Proc. Roy. Soc. London Ser. A., **322** (1971), 251–280.
- [8] С.А. Кругляк, Ю.С. Самойленко, *Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов*, Функц. анализ и приложения, **14**:1 (1980), 60–62.
- [9] Л.А. Назарова, А.В. Ройтер, *Представления частично упорядоченных множеств*, Записки научн. сем. ЛОМИ, **28** (1972), 5–31.
- [10] Ю.С. Самойленко, А.В. Стрелец, *О простых  $n$ -ках подпространств гильбертова пространства*, Укр. матем. ж., **61**:12 (2009), 1668–1703.